平成 15 年度埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程
物理学専攻入学試験問題物理学 I
10:00〜12:00

注意 (1) １，２，３の３問を、すべて別々の解答用紙に解答せよ。
(2) 各解答用紙には、問題番号と受験番号を記せ。

1 (34 点)

図のように、上端が水平な床につながった傾斜角 θ の下り斜面があり、上段の床を一様な球 (質量M、半径ａ) が、床と斜面の境界線に垂直の方向から角速度 ω_0 でころがってきて、途中ですべることなく、また床や斜面からとび跳ねることもなく、最大傾斜線に沿って斜面をころがり下りた。図には、水平な床をころがる場面と斜面をころがり下りる場面とをあわせて示した。

この運動のあいだ球の回転軸の方向は変化しなかったものとして、以下の間に答えよ。ただし、球と床および斜面とのあいだの静止摩擦係数は μ で、ころがり摩擦は無視できるものとし、重力加速度の大きさは g とする。

問 1 球の中心をとおる軸のまわりの慣性モーメント I はいくらか。

斜面をすべらずにころがっているときを考える。以下の問では、慣性モーメントに対して記号 I を用いて解答してよい。

問 2 球は床や斜面からとび跳ねることもなく、すべらずにころがるので、途中で力学的エネルギー (並進と回転による運動エネルギーと重力の位置エネルギーとの和) は変化せず、はじめに水平な床をころがっていたときと同じ値を保つ。

このことを用いて、球の中心が水平な床の上をころがっていたときからみてｈだけ下にきたときの球の角速度 ω を求めよ。ただし、$h \leq a\,(1-\cos\theta)$ とする。

問 3 斜面と接触する球の点は斜面に対して瞬間的に静止するので、斜面と球との間には散止摩擦力がはたらく。球が受ける瀞止摩擦力を F とする。

球の角速度を ω とすると、球の中心の速さはａω となる。このことを用いて、斜面をすべらずにころがる球に対する運動方程式を、ω と F (および、その他の必要な物理量) を用いて書き表せ。

問 4 静止摩擦力 F を求めよ。その結果を用いて球がすべらずにころがるために、傾斜角 θ が満たすべき条件を求めよ。

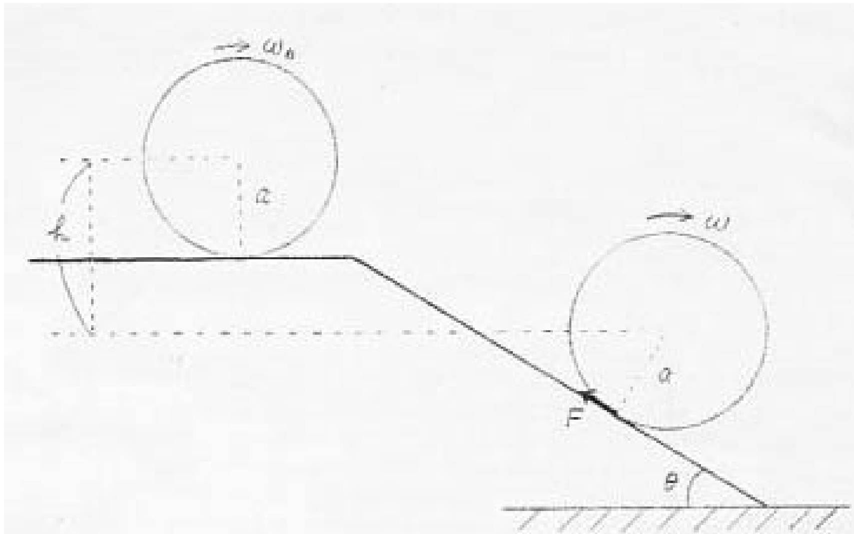

図 1:

2（33 点）

下図のように、半径ａの円盤状の極板をもつ平行平仮コンデンサーを考える。スイッチＡを閉じて起電力φの電池でコンデンサーを充電したのち、スイッチ B を閉じ放電させせる。抵抗器以外の導線の抵抗は無視し、極板間は真空とみなす。また極板の端面による電場の乱れは無視する。真空中の誘電率と透磁率をそれぞれ ϵ_0, μ_0 として以下の問に答えよ。

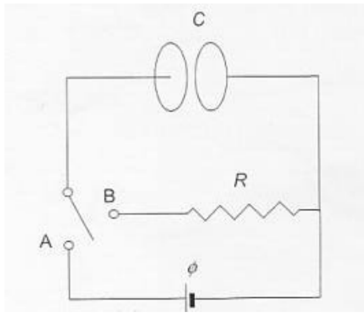

図 2:

問 1 スイッチ B を閉じた瞬間からの経過した時間を t とし、電気抵抗R、電気容量Cとしたとき、電流 I を求めよ。

問 2 この電流によって極板間に発生する中心軸の周りに回転する向きの磁束密度の大きさを、極板の中心軸からの距鮒 r に対する関数Ｂ (r) として求めよ。ただし導線を流れる電流は問 1 の答えにかかわらず関数 I(t) としてよい。

再びスイッチ A を閉じ、起電力ψの電池をつないたまま、極板の間隔を x(t) となるようにゆっくりと広げる。ただし、$x\left(t\right) \leq a$ とする、

問 3 このとき、極板間に生じる中心軸の周りに回転する向きの磁束密度の大きさを、極板の中心軸からの距離 r の関数として求めよ。

問 4 問 3 の磁場と極板間の電場によるポインティングベクトルの大きさを求めよ。

問 5 間隔が x からΔ x だけ広がる間に、極板間の空間から外に流れ出る電磁場のエネルギーを求めよ。ただし $x \geq \Delta x$ とし、極板間に生じる電場は一様であるとする。

3 (33 点)

1mol の気体のエントロピーをS、体積を　、温度をT、圧力を P として、以下の設問に答えよ。

問 1 Maxwell の関係式 $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$ が成り立つことを示せ。

問 2 SをV，Tの関数とみなすと、

$$dS = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV + \frac{C_V}{T} dT$$

とかけることを示せ。ただし、C_V は定積比熱である。上式に基づき、1mo1 の理想気体の場合に断熱過程において TV^α が保持することを示せ。ただし、$\alpha = R/C_V$, Rは気体定数である。

問 3 1mol の理想気体を体積 V_1、温度 T_1 の状態から体積が V_2 になるまで断熱圧縮した。圧縮した後の理想気体の温度 T_2 を求めよ。また、断熱圧縮の際に気体にされた仕事Wを計算せよ。

問 4 1mol のファンデルワールス気体の状態方程式は

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

で与えられ、a,b は気体の特性を反映した正の定数である。ただし V¿b とする。この 1mol のファンデルワールス気体を、体積 V_1、温度 T_1 の状態から体積が V_2 になるまで断熱圧縮した後の気体の温度 T_2 と、断熱圧縮の際に気体にされた仕事 W を計算せよ。ただし、定積比熱 C_V は定数としてよい。

問 5 体積 V_1, 温度 T_1 の 1mol のファンデルワールス気体が、真空中への自由膨張により体積が V_2 になった。自由膨張の過程では気体の内部エネルギーUが変化しないことを用いて、自由膨張後の温度 T_2 を求めよ。ただし、Uを　，Tの関数とみなすと

$$dU = C_V dT + \left(-P + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)\right) dV$$

が成り立ち、また定積比熱 C_V は定数としてよい。

(平成 15 年度)
埼玉大学大学院理工学研究科博士前期課程
物理学専攻入学試験問題物理学 II
(13:00〜15:00)

[注意]

1. ４，５，６の 3 問を, すべて別々の解答用紙に解答せよ。
   ６については, 問題 A または B のうちいずれか 1 題を選択し解答せよ。

2. 各解答用紙には, 問題番号と受験番号も記せ。

4 (34 点)

1 次元上を運動する質量 m の自由粒子の量子力学について、以下の問に答えよ。必要ならば積分公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ax^2+ikx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{1}{4a}k^2} \tag{1}$$

を使ってよい。ここで,a は実数部分が正の複素数,k は実数である。

まず, 期格化された波動関数

$$\psi_0(x) = \left(2\pi\xi^2\right)^{-\frac{1}{4}} exp\left[\frac{i}{\hbar}p_0 x - \frac{1}{4\xi^2}\left(x - x_0\right)^2\right] \tag{2}$$

によって表されている状態について考える。ここで x_0, p_0, ξ は実数定数である。

問 1 粒子の位置座標と運動量の期待値 $< x >, < p >$ を求めよ。

問 2 粒子の位置座標が無限小区間 [x,x+dx] の中にある確率を求めよ。

問 3 運動量表示の波動関数を求め, 粒子の運動量が無限小区間 [p,p+dp] の中にある確率を求めよ。

問 4 (問 2) と (問 3) の結果を用いて、ξ→ 0 および ξ→∞の極限で、波動関数 ψ_0 が、それぞれどのような状態を表しているかを簡潔に述べよ。

次に, 波動関数の時間発展について考える。

問 5 運動量表示の波動関数 $\tilde{\psi}(p,t)$ に対する自由粒子の Schrödinger 方程式を書き、その解を求めよ。ただし, 時刻 t = 0 での迦動最表示の波動関数を $\tilde{\psi}_0(p)$ とする。

問 6 時刻 t = 0 での波動関数が式 (2) の $\psi_0(x)$ で与えられているとき、時刻 t で波動関数 $\psi(x,t)$ を求めよ。ただし、$x_0 = 0, p_0 = 0$ とする。

5 (33 点)

一辺 Ld-次元立方体中 (d=1.2.3) における、相互作用をしない質量mの量子力学的粒子の統計力学を考える。ただし簡単のため、粒子のスピン自由度は考えない。(スピン縮重度は 1 とする。) また、k_B ボルツマン定数である。

問 1 大分配関数$\Xi = \prod_i \sum_{n_i=0}^{N/D} \left(e^{(\mu-\epsilon_i)/k_BT}\right)^{n_i}$ の、エネルギー準位 $\epsilon_i = \epsilon$ のときの n_i についての和 $\sum_{n_i=0}^{N/D} \left(e^{(\mu-\epsilon_i)/k_BT}\right)^{n_i}$ をフェルミ粒子 ($N_D = 1$)、ボーズ粒子 ($N_D = \infty$) に対して求め、フェルミ分布関数は $f(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\mu-\epsilon_i)/k_BT}+1}$、ボーズ分布関数は $n(\epsilon) = \frac{1}{e^{(\mu-\epsilon_i)/k_BT}-1}$ で与えられることを示せ。ただし μ は化学ポテンシャルである。

問 2 d-次元系では、波数空間の体積要素 $\left(\frac{2\pi}{L}\right)^d$ あたりひとつの状態が存在する。また波数 k の粒子の運動エネルギーは $\epsilon_k = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ である。これらの事実から、d-次元系における単位エネルギーあたりの状態数（状態密度）は $\epsilon > 0$ に対して $\rho_d(\epsilon) = D_d \epsilon^{\frac{d}{2}-1}$ であたえられ、D_d は L^d に比例する定数であることがわかる。D_2, D_3 を具体的に求めよ。

以下の設問では、３次元空間における状態密度 $\rho_3(\epsilon) = D_3\sqrt{\epsilon}(\epsilon > 0)$ を用いよ。

¥item ３次元空間中のフェルミ粒子について、全粒子数 N と内部エネルギー U を与える表式を書き下せ。さらに、$T = 0$ の場合に N と U を μ を含む関数として求めよ。

問 3 ３次元空間中のボーズ粒子について、ボーズ凝縮温度 T_0 を求めよ。ただし積分公式

$$\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{e^x - 1} dx \cong 2.3 \tag{3}$$

を考慮せよ。また、$T < T_0$ の場合に何がおきるか簡潔に述べよ。