

02/05/05

# 物理学実験

# アナログ回路

実験日 5月15、16日、22、23日、29、30日

## 実験の目的

デジタル回路全盛の時代にあっても、自然や人間に接する部分、すなわち計測あるいは表示にまつわる基本技術はアナログ電子回路技術に負うところが大きい。物理量は必ずアナログ量として計測されるので、物理実験の基本技術の一つである。コンピューターに代表されるデジタル処理も、まずアナログ計測が正しく行なわれなければ、意味を持たない。この実験では、基本的なアナログ回路を自作し、その基本技術を習得する。

また物理学の多くの分野で「線形応答システム」という概念が成り立つが、アナログ電子回路はその代表的モデルである。そこで、この実験を通じ線形システムについて学習し、その数学的な扱いに慣れることができる。このように、実験技術の習得という面と、物理現象モデルの理解という面の両方の面白さを学ぶ。

## 実験の概要

抵抗 ( $R$ )、キャパシタンス ( $C$ )、インダクタンス ( $L$ ) を用いた線形受動回路をつくり、周波数特性や過渡特性を調べる。これにより回路素子、プリント基板、オシロスコープ、信号発生器などの基本的な道具立てに慣れ、はんだ付けの技術を習得する。ここでは、スピーカーを用いているいろいろな信号を耳で聞いてみた。またフーリエ変換、ラプラス変換の考え方を学習した。

## 実験の道具立て

測定器具	信号発生器、オシロスコープ、直流電源、デジタルマルチメーター
ケーブル類	BNC - BNC、BNC - クリップ、電源ケーブル、 オシロスコープ用プローブ、T分岐
オーディオ	スピーカー
工具類	ハンダごて、ハンダ吸い取り器、ワイヤストリップ、ニッパー
消耗品	プリント基板、電子回路部品

## ● 音と波形

### 実験 2

信号発生器の出力をスピーカーの両端につないで、音を出した。正弦波、三角波、方形波、の音色の違いを聞き分けた。また、自分の可聴周波数の範囲を実測した。

マイクroフォンをオシロスコープにつなぎ、いろいろな音の信号波形を目で観測する。

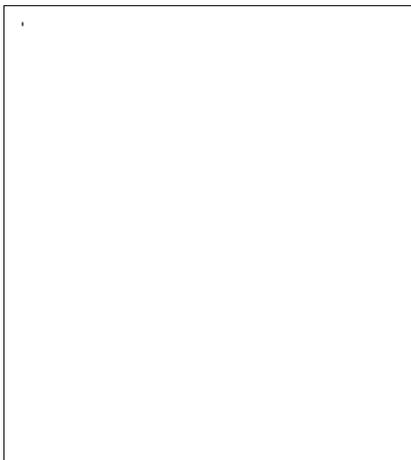
### 実験結果と考察

波形による音の聞こえ方

同じ振幅で比べた場合、正弦波と三角波の音の大きさは、同じ程度に聞こえたが、方形波の音の大きさは、他のより大きく聞こえた。これは正弦波、三角波がピークの部分（電圧のもっとも高い部分）が一瞬であるのに対し、方形波はピークの部分が長く続くので、音が大きく聞こえると考えられる。

可聴周波数は  $1.8 \text{ Hz} \sim 15.5 \text{ kHz}$  であった。

## ● RC 積分回路



左の図のような回路で、点 A に各周波数  $\omega$  の交流信号  $v$  を信号発生器から入力し、点 B での出力電圧  $w$  をオシロスコープでモニタした。  $w : v = (1/i\omega C) : (R + 1/i\omega C)$  となるから、複素出力電圧  $w$  と複素入力電圧  $v$  の比は

$$F(\omega) = \frac{w}{v} = \frac{1}{1 + i\omega RC}$$

となる。この  $F(\omega)$  は複素数であって、その絶対値は入力：出力の電圧の比を、またその偏角は入力と出力の位相のずれを表す。

### 実験 3

$10 \text{ k}\Omega$ 、 $1000 \text{ pF}$  の RC 積分回路と  $2.2 \text{ k}\Omega$ 、 $0.01 \mu\text{F}$  の RC 積分回路を作り、それぞれの積分回路について、正弦波信号を用いて周波数特性を実測した。周波数を X 軸、電圧比の絶対値を Y 軸にとって、グラフを作り、両対数グラフにプロットした。また、その値と計算値を比較した。

入力波信号と出力波信号の位相の関係をグラフに書き、定量的に調べた。

## 実験結果と考察

F ( ) の絶対値を計算すると、

$$|F| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

となる。

RC は時定数であり、それぞれの積分回路の時定数は、 $1.0 \times 10^{-5} (s)$ 、 $2.2 \times 10^{-5} (s)$  である。それぞれの理論値と実験値をグラフに描いた。(別紙、 )

式からわかるように、RC の値が大きいほうが、低い周波数で電圧が下がる。

積分回路では、周波数が高いと出力波の電圧はどんどん弱まる、だから、信号の中の遅い成分のみを取り出すことができる。このような回路をローパスフィルタとも言う。

位相差は次のように説明される。もともと電圧比 F は以下の式に表せる入力電圧と出力電圧の比である。

$$F = \frac{1/i\omega c}{R + 1/i\omega c} \quad (1)$$

電圧を実数と虚数平面を使って、入力波と出力波は右図のようなベクトルで表すことができる。この二つのベクトルの  $\arg ( \phi_2 - \phi_1 )$  が位相差である。

$\arg ( \phi_2 - \phi_1 )$  は入力波と出力波の時間のずれ  $t_2 - t_1$  を用いて

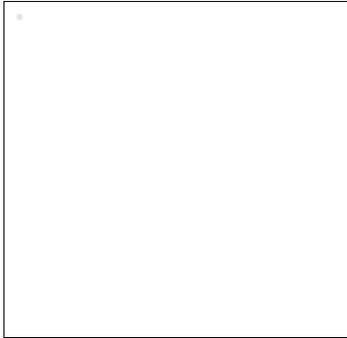
$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi f(t_2 - t_1)$$

となる。

(1) の式で、分母の入力波について、考えてみよう。もし、周波数  $f$  が非常に小さい場合、入力波の第二項は無限大に近づくので、入力波と出力波の位相差は 0 になる。逆に周波数  $f$  が非常に大きい場合、入力波の第二項は 0 に近づくので、入力波と出力波の位相差は  $\pi/2$  になる。グラフの y 軸にはわかりやすいようにラジアンではなく、 $^\circ$  を用いた。(別紙 )



## ● RC 微分回路



左図のような回路に対して、出力と入力の電圧比は  
 $w : v = R : (R + 1 / i \omega c)$  となるから、

$$F = \frac{w}{v} = \frac{i\omega RC}{1 + i\omega RC}$$

となる。

### 実験 4

10 k $\Omega$ 、1000 pF の RC 微分回路と 2.2 k $\Omega$ 、0.01  $\mu$ F の RC 微分回路を作り、それぞれの積分回路について、正弦波信号を用いて周波数特性を実測した。周波数を X 軸、電圧比の絶対値を Y 軸にとって、グラフを作り、両対数グラフにプロットした。また、その値と計算値を比較した。

入力波信号と出力波信号の位相の関係をグラフに書き、定量的に調べた。

### 実験結果と考察

$F(\omega)$  の絶対値を計算すると、

$$|F| = \frac{\omega RC}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}$$

となる。RC は時定数であり、それぞれの微分回路の時定数は、積分回路と同じく、 $1.0 \times 10^{-5}$  (s)、 $2.2 \times 10^{-5}$  (s) である。それぞれの理論値と実験値をグラフに描いた。(別紙、 )

微分回路では、周波数を上げていくと、 $F$  は次第に 1 に近づく。同じ周波数で比べた場合、時定数が大きいほうが、 $F$  の値は小さい。

微分回路はハイパスフィルタ (広域フィルタ) 回路とも呼ばれ、信号の直流成分および遅い周波数成分を取り除くのに利用される。これは遅い周波数ほどコンデンサを通りにくくなるためである。

積分回路の時と同じく、位相差は次のように説明される。もともと電圧比  $F$  は以下の式に表せる入力電圧と出力電圧の比である。

$$F = \frac{R}{R + 1/i\omega c} \quad (2)$$

電圧を実数と虚数平面を使って、入力波と出力波は右



図のようなベクトルで表すことができる。この二つのベクトルの  $\arg(\phi_2 - \phi_1)$  が位相差である。

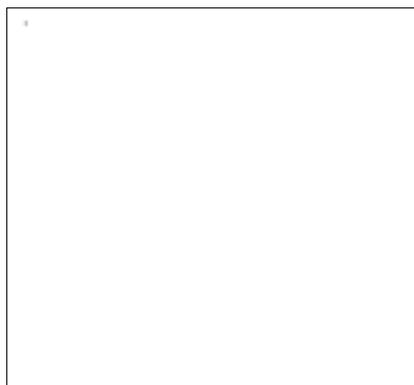
位相差は

$$\phi_2 - \phi_1 = 2\pi f(t_2 - t_1)$$

となる。

(2) の式で、分母の入力波について、考えてみよう。もし、周波数  $f$  が非常に小さい場合、入力波の第二項は無限大に近づくので、入力波と出力波の位相差は  $\pi/2$  になる。逆に周波数  $f$  が非常に大きい場合、入力波の第二項は 0 に近づくので、入力波と出力波の位相差は 0 になる。グラフの y 軸にはわかりやすいようにラジアンではなく、 $^\circ$  を用いた。(別紙)

## ● LCR 共鳴回路



左図のような回路に対して、出力と入力の電圧比は  $w : v = R : (R + 1 / i \omega C)$  となるから、

$$F = \frac{w}{v} = \frac{i\omega / RC}{1/LC - \omega^2 + i\omega/RC}$$

となる。  $L < 4RC^2$  のときこの  $F(\omega)$  は  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

付近でピークを示す。これが共鳴回路である。共鳴が生じるのは、L と C が同時に関与する結果、V と I についての方程式系が 2 階の微分方程式になるためである。L と R のみ、R と C のみではこうならない。

### 実験 5

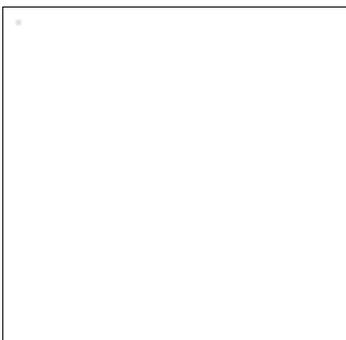
$L \ll R^2 C$  をみたすような LC 共鳴回路 (1 mH、1k $\Omega$ 、0.01  $\mu$ F) を作り、その周波数特性を実測するとともに、それを計算値と比較した。また、コイルに含まれる小さい抵抗  $r$  を含めて、(3) 式を計算した。

## 実験結果と考察

Fの絶対値を計ると、

$$|F| = \frac{w}{v} = \omega RC \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}}$$

であるが、実験値のFのピーク値は1より小さかった。



これは左図のように、実際にはコイルに小さな抵抗  $r$  があるためだとおもわれる。テスターを用い実際にコイルの抵抗を測定すると、その値は  $12.4$  だった。そこで、あらためて、コイル内に含まれる小さな抵抗  $r$  を含めて  $F$  を計算しなおすと

$$F(\omega) = \frac{w}{v} = \frac{r + i\omega L}{R - \omega^2 RCL + r + i(\omega RrC + \omega L)}$$

となり、Fの絶対値は

$$|F| = \sqrt{\frac{\omega^2 L^2 + r^2}{\left(R - \omega^2 RCL + r\right)^2 + \left(\omega RCL + \omega L\right)^2}}$$

となる。この値と実験値を表(別紙)にプロットした。

この表からわかるように、の高いところでは  $L$  のインピーダンスが十分大きくなるため、 $LC$  の並列合成において  $L$  は無視できる。従って回路は  $RC$  積分回路と等価になり  $F(\omega)$  は  $1/\omega$  に比例した積分特性を示す。逆にの低いところでは、 $C$  のインピーダンスが十分に大きくなるので、 $LC$  の並列合成において  $C$  が無視できる。このとき回路は  $LR$  回路となり、 $F(\omega)$  は  $\omega$  に比例した微分特性を示す。

## ● 積分回路の過渡特性

積分回路に任意の波形の電圧  $v(t)$  を入力したとき、出力電圧  $w(t)$  がどんな波形になるか考えてみる。まず、

$$V = \int_{-\infty}^{\infty} dt v(t) \exp[-i\omega t], W(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt v(t) \exp[-i\omega t]$$

とフーリエ変換してみると、フーリエ成分の間には

$$W(\omega) = \frac{V(\omega)}{1 + i\omega\tau}$$

という簡単な関係が成り立つ。 $\tau = RC$  はこの回路の時定数である。そこでこれを用いて

W ( t ) を逆変換する。

$$\begin{aligned}
 w(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega W(\omega) \exp[i\omega t] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega W(\omega) \frac{\exp[i\omega t]}{1+i\omega\tau} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt'' \int_{-\infty}^{\infty} d\omega v(t'') \frac{\exp[i\omega(t-t'')]}{1+i\omega\tau} \\
 &= \int_0^{\infty} dt' v(t-t') \frac{\exp[-t'/\tau]}{\tau} \dots\dots (4)
 \end{aligned}$$

と求まる。ただし  $t' = t - t''$  と置いた。すなわち過去の入力が時定数  $\tau$  で指数型に減衰しつつ積み重なっていく、という構造であることがわかる。  $\exp(-t'/\tau)/\tau$  をこの関数の応答関数と呼ぶ。

より一般にある回路のフーリエ空間でのフィルタ関数を  $F(\omega) = W(\omega)/V(\omega)$  とすれば、その回路の応答関数  $f(t)$  は  $F(\omega)$  のフーリエ変換になっており、出力信号は

$$w(t) = \int_0^{\infty} dt' v(t-t') f(t') \dots\dots (5)$$

のように畳み込みで作られるのである。式(4)(5)で時間の積分が  $t' > 0$  に限られるのは、数学的には  $F(\omega)$  が複素空間の下半分平面で正則であるためであり、物理的には「入力信号がきて、初めて出力が生まれる。」という因果律を表している。

$V(t) = \delta(t - t_0)$ 、つまり時刻  $t_0$  でインパルス入力があったとき式(4)より

$$w(t) \propto \exp\left[-(t-t_0)/\tau\right] \dots\dots (6)$$

のように、時定数  $\tau$  で減衰指数型波形が得られる。

$v(t)$  が時刻  $t_0$  で 0 から  $V_0$  へ階段型に変化したとき積分を実行して

$$w(t) \propto 1 - \exp\left[-(t-t_0)/\tau\right] \dots\dots (7)$$

を得る。

## 実験 6

信号発生器から積分回路へ階段波(十分長い方形波で代用する。)を入力し定量的に調べた。その際、スコープ上の波形を読み取りセミログのグラフを用いて、直線になることを調べた。また、グラフから時定数を求めた。

## 実験結果と考察

5.75 Hz の階段波を用いて、積分回路の過渡特性をオシロスコープから読み取り、グラフ（別紙）にプロットした。理論では、曲線が  $1 - \exp(- (t - t_0) / \tau)$  に比例している、と導き出された。そこで、本当にオシロスコープから読み取った曲線は  $\exp(- (t - t_0) / \tau)$  の形の曲線なのか調べてみよう。

曲線は  $1 - \exp(- (t - t_0) / \tau)$  に比例しているとするならば、

$$w = \alpha (1 - \exp \beta)$$

ただし、 $\alpha$  は比例定数、 $\beta = - (t - t_0) / \tau$  とおいた。

$$\exp \beta = 1 - \frac{w}{\alpha}$$

ここで  $t = 0$  を考えよう。グラフより、 $t = 0$  のとき、 $w = 1.91$ 、 $\exp \beta = 0$  である。よって、

$$0 = 1 - \frac{1.91}{\alpha}$$
$$\alpha = 1.91$$

を代入すると

$$\exp \beta = 1 - \frac{w}{1.91}$$

この値をセミログのグラフにプロットした。（別紙）

このグラフより、プロットした線を繋ぐと直線になる。またその直線の傾きは、以下のようにして求められる。

セミログのグラフにプロットした関数は  $y$  方向のみ対数を取り、

$$\log y = \log_{10} \alpha \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$
$$= \log_{10} \alpha + (\log_{10} e) \times \left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

となる。グラフより  $y$  が 1 から 0.1 まで変化したときの  $t$  の増加  $\Delta t$  を読み取り、

$\log 1 - \log 0.1 = (\log_{10} e) \times \left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right)$  に代入すると、

$$-1 = (\log_{10} e) \times \frac{-23 \times 10^{-6}}{\tau}$$
$$\tau = (\log_{10} e) \times 23 \times 10^{-6}$$
$$= 9.98 \times 10^{-6}$$

時定数の理論値は  $1.0 \times 10^{-5}$  とほぼ同じである。

以上のことよりオシロスコープより読み取った曲線は  $\exp(-(t - t_0)/\tau)$  の形の曲線であることが確認できた。

## ● 微分回路の過渡性

今度は微分回路が階段型入力電圧に対してどんな応対を示すかを、調べた。

コンデンサにたまった電荷を  $Q$  とすれば、回路方程式は

$$v(t) = \frac{Q(t)}{C} + R \frac{dQ(t)}{dt}$$

である。これを  $Q(0) = 0$ 、 $t < 0$  で  $v(t) = 0$ 、 $t > 0$  で  $v(t) = v_0$  の条件下で解くと、

$$Q = Cv_0 \left( 1 - \exp\left[\frac{-t}{RC}\right] \right)$$

よって出力はデルタ関数に対する積分回路の応答とおなじく、

$$w(t) = RI(t) = R \frac{dQ(t)}{dt} = v_0 \exp\left[\frac{-t}{RC}\right]$$

となる。

### 実験 7

信号発生器から微分回路へ方形波を入力し、実験 6 と同じように定量的に調べた。また微分回路の時定数を  $\tau$ 、方形波の周期を  $T$  とするとき  $\tau \gg T$  と  $\tau \ll T$  とで様子が異なるか調べた。

### 実験結果と考察

6.85 Hz の階段波を用いて、積分回路の過渡特性をオシロスコープから読み取り、グラフにプロットした。(別紙)理論では、曲線が  $\exp(-(t - t_0)/\tau)$  に比例している、と導き出された。そこで、本当にオシロスコープから読み取った曲線は  $\exp(-(t - t_0)/\tau)$  の形の曲線なのか実験 6 と同様に調べてみた。

グラフより  $y$  が 1 から 0.1 まで変化したときの  $t$  の増加  $\Delta t$  を読み取り、

$$\log y = (\log_{10} e) \times \left(-\frac{\Delta t}{\tau}\right) \text{ に代入すると}$$

$$-1 = (\log_{10} e) \times \frac{-24 \times 10^{-6}}{\tau}$$

$$\tau = (\log_{10} e) \times 24 \times 10^{-6}$$

$$= 1.04 \times 10^{-5}$$

時定数の理論値は  $1.0 \times 10^{-5}$  とほぼ同じである。

以上のことより、オシロスコープより読み取った曲線は  $\exp(-(t - t_0)/\tau)$  の形の曲線であることが確認できた。(別紙 )

次に方形波の周期を変えてオシロスコープを観察した。

$\ll T$ 、 $f = 6 \text{ Hz}$  程度のときは別紙 のグラフのような曲線が観察できるが、 $\gg T$ 、 $f = 16 \text{ kHz}$  のときは別紙 のグラフの曲線が得られた。別紙 のグラフは電圧が 0 に落ち込む前に電圧が反転している。これは周期  $T$  が小さいため、コンデンサに電荷がたまる前に反対の電圧がかかるからである。さらに周期を短くして  $f = 160 \text{ kHz}$  の時は、別紙 のグラフが得られる。このグラフでは、電圧が反転した際にオシロスコープ本体のインピーダンスによるノイズが観察できる。

## ● 共鳴回路の過渡特性

入力電圧と出力電圧をそれぞれ  $v(t)$ 、 $w(t)$  とし、コンデンサとコイルを流れる電流をそれぞれ  $j_c(t)$ 、 $j_L(t)$  とすれば、回路方程式は

$$w(t) = L \frac{dj_L}{dt} = \int_0^t j_c(t') dt' = v(t) - R[j_c(t) + j_L(t)]$$

となる。そこで  $v(t)$ 、 $w(t)$ 、 $j_c(t)$ 、 $j_L(t)$  のラプラス変換を  $V(s)$ 、 $W(s)$ 、 $J_c(s)$ 、 $J_L(s)$  と書いてこの式をいっぺんにラプラス変換する。そのとき、初期値を  $J_L(0) = 0$  ととれば、

$$W(s) = L s J_L(s) = \frac{J_c(s)}{sC} = V(s) - R(J_c(s) + J_L(s))$$

と代数方程式になる。これから  $J_c(s)$ 、 $J_L(s)$  を消去し  $W(s)$  について解けば、

$$W(s) = \frac{s/RC}{s^2 + s/RC + 1/LC} V(s) = F(s)V(s) \dots (9)$$

となる。この  $F(s)$  はフーリエ空間でのフィルタ関数  $F(\omega)$  において変数を  $i\omega \rightarrow s$  とおきかえたものに一致する。そこで  $F(s)$  をラプラス空間でのフィルタ関数と呼ぶ。

出力波形  $w(t)$  を計算するには、 $W(s)$  がわかればよく、そのためにはフィルタ関数が求まればよく、そのためにはさらに、インピーダンスの合成と比例配分の法則にしたがって  $R, C, L$  にそれぞれ  $R$ 、 $1/sC$ 、 $sL$  なるインピーダンスを与えてやればよい、とわかった。もはや、回路の微分方程式にまで戻る必要はないことになる。

ここで簡単のため、入力  $v(t)$  が高さ  $v_0$  の階段関数である場合を考えよう。すると  $V(s) = v_0/s$  であるから式(9)は

$$W(s) = \frac{v_0/RC}{s^2 + s/RC + 1/LC} = \frac{v_0/RC}{(s+a)^2 + b^2}$$

ただし  $a = (2RC)^{-1}$ 、 $b = (1/LC - 1/4R^2C^2)^{1/2}$  は2つの時定数で、 $(1/LC) > (1/4R^2C^2)$  と仮定した。これから

$$w(t) = \frac{v_0}{RCb} \exp[-at] \sin(bt) \quad \dots(10)$$

を得るが、これは減衰振動にほかならない。

## 実験 8

共鳴回路に階段波を入力し、出力電圧波形を上記の計算結果と定量的に比較した。

### 実験結果と考察

4.35 Hz の階段波を用いて、共鳴回路の過渡特性をオシロスコープから読み取り、グラフ(別紙)にプロットした。(10)の式よりグラフのサインカーブの腹と腹をつないだ線は  $\exp(-at)$  になるはずである。実験6, 7のように、セミログのグラフにプロットし、その点を結んだ線が直線になることを確認した。また、グラフより  $y$  が 100 から 10 まで変化したときの  $t$  の増加  $\Delta t$  を読み取り、 $\log y = (\log_{10} e) \times (-a\Delta t)$  に代入すると

$$\begin{aligned} \log 10 - \log 100 &= (\log_{10} e) \times \left(-\frac{50 \times 10^{-6}}{a}\right) \\ 1 - 2 &= (\log_{10} e) \times \left(\frac{-50 \times 10^{-6}}{a}\right) \\ a &= (\log_{10} e) \times 50 \times 10^{-6} \\ &= 2.17 \times 10^{-5} \end{aligned}$$

理論値  $a = (2RC)^{-1} = 2.00 \times 10^{-5}$  とほぼ同じである。

以上のことより、オシロスコープより読み取った曲線は  $\exp(-at)$  の形の曲線であることが確認できた。(別紙)